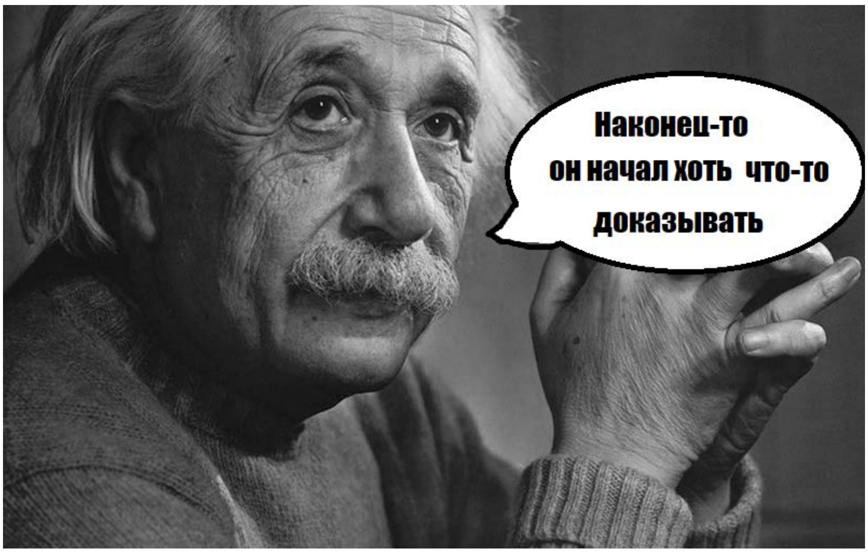
Данная серия методичек продолжает посвящаться лучшему семинаристу по электроду
зря, наверное

Студент1: Можно выйти?
Семинарист: Да.
Студент2: А вот Вятчанин не разрешает (Это правда, кстати. Он был нашим семинаристом по радио)
Семинарист: А, Вятчанин? Я у него учился. Он может. В этом смысле он немного недоразвитый.

Студент: А как выглядят преобразования Лоренца для матрицы?
Семинарист: Вот есть такая наука – двумерная теория конформности. Если группа…

Среди всех волн особенно выделяют гармонические. Мы знаем, что их характеризуют циклическая частота ω и волновой вектор **k**. Как вы уже догадались из названия методички, они тоже образуют 4-вектор. Только надо будет их по размерности подогнать:
{ω, c**k**} или {ω/c, **k**}.
Теперь давайте вспомним, что $E=E_0\cos(\omega t-\mathbf{kr})$ (опустим для простоты фазу), или $E_0\cos(\omega/c*ct-\mathbf{kr})$.
Ничего не напоминает? Перепишем тогда ещё так: $E_0\cos(\omega/c*ct-k_xx-k_yy-k_zz)$.
Да ведь это же псевдоскалярное произведение двух 4-векторов: {ω/c, **k**} и {ct, **r**}! Помните первую методичку? Если у нас 4-вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) и (y_1, y_2, y_3, y_4), то их псевдоскалярное произведение $x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$ является инвариантом СК! Таким образом, ***фаза синусоидальной электромагнитной волны является инвариантом СК***. В принципе всё логично.

Я произнёс предложение «если у нас 4-вектора (x_1, x_2, x_3, x_4) и (y_1, y_2, y_3, y_4), то их псевдоскалярное произведение $x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$ является инвариантом СК». Теперь, на четвёртой методичке, мы достаточно круты, чтобы мы могли это ***доказать.***



Для доказательства воспользуемся определением 4-вектора: это столбец чисел, которые преобразуются по преобразованиям Лоренца.

План доказательства:

Взять два произвольных 4-вектора (a_0, a_1, a_2, a_3) и (b_0, b_1, b_2, b_3)

Подсчитать их начальное ПСП $a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3$

Подвергнуть каждый из них преобразованиям Лоренца

Подсчитать их конечное ПСП

Убедиться, что они равны.

Поехали. Подвергаем 4-вектора преобразованию Лоренца!

Lets go. Надо вспомнить конкретный вид преобразований Лоренца. А в от они:

$$a_1' = \gamma(a_1 - \beta a_0) \qquad a_2' = a_2$$
$$a_0' = \gamma(a_0 - \beta a_1) \qquad a_3' = a_3$$

Мы, естественно, рассматриваем самые простые преобразования Лоренца – где последние две координаты остаются без изменений.

Вообще преобразования Лоренца можно записать несколькими способами:

1) используя скорость v движения одной СК относительно другой. Самый плохой способ.

2) используя γ и β – параметры перехода в другую СК, релятивистский корень и v/c. Они, разумеется, связаны отношением

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$ и мы обходиться одной переменной, но для краткости вводят обе.

3) используя безразмерный параметр θ, т.н. называемую быстроту (вполне общеупотребительный термин, см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Быстрота). Она определяется как $\operatorname{th}\theta = v/c = \beta$. Через быстроту преобразования Лоренца записываются:

$$a_1' = \operatorname{ch}\theta\, a_1 - \operatorname{sh}\theta\, a_0$$
$$a_0' = \operatorname{ch}\theta\, a_0 - \operatorname{sh}\theta\, a_1$$

Мы будем использовать способ 2, способ 3 тоже допустим, про способ 1 вам следует забыть, потому что использовать 3-скорость в СТО… моветон ☺

В частности, для 4-вектора пространства-времени получаем

$$x' = \gamma(x - \beta \cdot ct)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

Если записать $\beta = v/c$, то получим более привычную запись

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

Но запись через беты лучше.

Так, мы отвлеклись! Подвергнем преобразованием Лоренца один 4-вектор, один другой. Ну что, давайте считать ПСП. Оно будет

$$a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3'$$

Расписываем:

$$a_0' b_0' - a_1' b_1' - a_2' b_2' - a_3' b_3' =$$

$$= \gamma(a_0 - \beta a_1)\gamma(b_0 - \beta b_1) - \gamma(a_1 - \beta a_0)\gamma(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

И вычтем из этого старое ПСП – $a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$!

Ну, $-a_2b_2 - a_3b_3$ сократятся сразу.

$$\gamma^2(a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2(a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_0 b_0 + a_1 b_1$$

Раскрываем скобки.

$$\gamma^2(a_0b_0-\underline{\beta a_1b_0}-\underline{\beta a_0b_1}-\beta^2a_1b_1)-$$
$$-\gamma^2(a_1b_1-\underline{\beta a_1b_0}-\underline{\beta a_0b_1}-\beta^2a_0b_0)-$$
$$-a_0b_0+a_1b_1$$

То, что подчёркнуто одним цветом, сократится.

$$\gamma^2(1+\beta^2)a_0b_0-\gamma^2(1+\beta^2)a_1b_1-$$
$$-a_0b_0+a_1b_1$$

Ну а это

$$(a_0b_0-a_1b_1)(\gamma^2(1+\beta^2)-1)$$

А теперь смотрим на

$$\gamma^2=\frac{1}{1-\beta^2}$$

И видим, что вторая скобка обнуляется. Ч.т.д.: ***при преобразованиях Лоренца псевдоскалярное произведение сохраняется.***

Тем самым сохраняется фаза э/м колебаний.

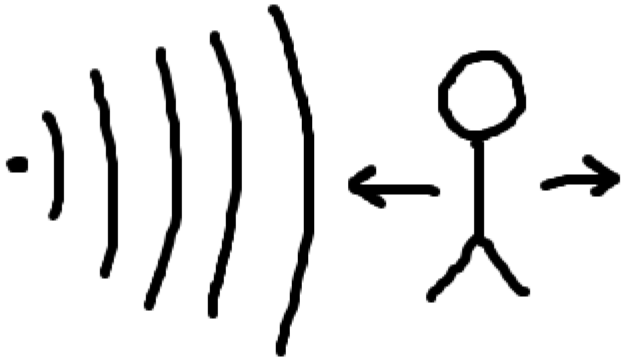
Удивляет ли нас тот факт, что при преобразованиях Лоренца псевдоскалярное произведение сохраняется? Нет. В обычном 3-пространстве 3-вектор – это стрелочка, которая в каждой СК представляется в виде 3 чисел. Но сама стрелочка от СК не зависит, её норма и скалярное произведение на другую стрелочку есть инвариант СК. Так и с 4-векторами: столбец из 4 чисел от СК зависит, а псевдоскалярное произведение от 4-стрелочки на другую в 4-пространстве – нет.

А теперь спустимся с небес на землю и порешаем какие-нибудь задачи.

ЗАДАЧА 11.5а

11.5а. Поскольку Земля движется вокруг Солнца, частоты излучения всех внеземных источников испытывают периодические изменения. Оценить масштабы этих изменений $\delta\omega/\omega$, а также вклад в эти изменения собственного суточного вращения Земли.

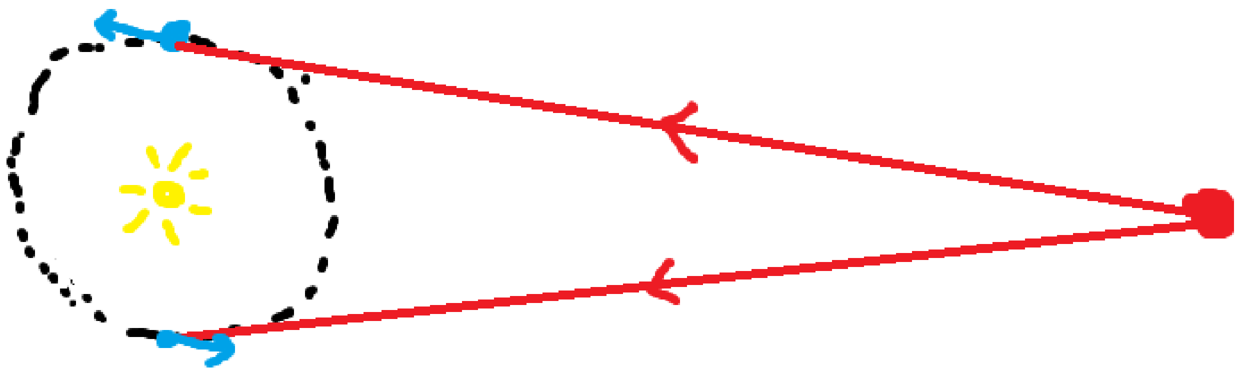
Да ведь это в чистом виде эффект Доплера! Источник излучает волну



А нам, приёмнику, кажется, что частота то меньше, то больше, в зависимости от того, мы бежим к источнику или от него.

Ну если у нас по улице курсируют троллейбусы в одну сторону, то они нам будут попадаться чаще, если мы будем идти навстречу им, и реже, если от них.

И давайте себе представим звезду Бетельгейзе, которая радует нас волной на ω. По крайней мере, такая частота у неё в её СК. А вот Земля вращается и



В верхней точке она движется от красного света Бетельгейзе, а внизу – навстречу ему. Именно в этих точках будут наибольшие отклонения частоты от естественного красного цвета Бетельгейзе в её СК.

Замечание: эффект Доплера – классический, для него СТО не нужна. Просто в СТО там получаются другие, чуть более точные формулы. Скорость Земли – около 30 км/с, в 10^4 раз меньше скорости, не слишком много, мы могли бы и классическими формулами Доплера пользоваться:

$$1^\circ)\quad \xrightarrow{\vec{V}} \xleftarrow{\vec{k}} \quad \alpha = \pi \qquad \omega'_{max} = \frac{\omega(1+\beta)}{\ } = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{\ }} > \omega$$

$$2^\circ)\quad \xleftarrow{\vec{V}} \xleftarrow{\vec{k}} \quad \alpha = 0 \qquad \omega'_{min} = \frac{\omega(1-\beta)}{\ } = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{\ }} < \omega$$

Но мы будем пользоваться релятивистскими:

$$1^\circ)\quad \xrightarrow{\vec{V}} \xleftarrow{\vec{k}} \quad \alpha = \pi \qquad \omega'_{max} = \frac{\omega(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega$$

$$2^\circ)\quad \xleftarrow{\vec{V}} \xleftarrow{\vec{k}} \quad \alpha = 0 \qquad \omega'_{min} = \frac{\omega(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} < \omega$$

А далее вычисляется разброс циклических частот:

$$\omega'_{max} - \omega'_{min} = \omega\left\{\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\right\} = \omega\cdot\left\{\frac{1+\beta-(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}$$

$$\frac{\omega'_{max} - \omega'_{min}}{\omega} = \frac{\delta\omega'}{\omega} = \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Численные оценки:

а) орбитальное движение:

$$V_{орб.} \approx 30\ \frac{км}{с} \sim 3\cdot 10^6\ \frac{см}{с}$$

$$\beta_{орб.} = \frac{V_{орб.}}{c} \sim 10^{-4} << 1.$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \sim 2\beta_{орб.} \sim 10^{-4}$$

б) суточное движение:

$$V_{сут.} \approx 0{,}5\ \frac{км}{с} \sim 5\cdot 10^4\ \frac{см}{с}$$

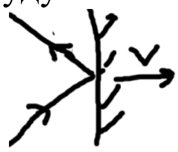
$$\beta_{сут.} = \frac{V_{сут.}}{c} \sim 10^{-6}$$

$$\frac{\delta\omega'}{\omega} \approx 2\beta_{сут.} \sim 10^{-6}$$

ЗАДАЧА 11.6

11.6. Найти зависимость между углом падения и углом отражения, а также закон преобразования частоты при отражении света от зеркала, движущегося с постоянной скоростью V.

В условии не сказано, в какую из сторон движется зеркало, я буду считать,



что в сторону падающего луча (как будто он толкает зеркало).

В СК, где зеркало покоится, угол падения точно равен углу отражения, и частота не меняется!

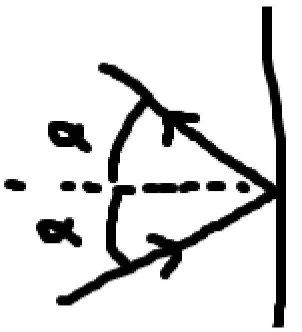
Ось x направим слева направо, п – падающая волна, о – отражённая.

$$\frac{k_x^{п}}{\|\vec{k}\|} = \frac{-k_x^{о}}{\|\vec{k}_x^{о}\|} = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$$

$$\omega_{п} = \omega_{о} = \omega$$

Где α – см. рисунок

В СИСТЕМЕ ЗЕРКАЛА



Это всё было в системе зеркала, теперь перейдём в систему наблюдателя. И $k_x^{о}$, и $k_x^{п}$, и $\omega_{п}$ и $\omega_{о}$ ждут преобразования Лоренца. Надо только понять, будет ли в числителе плюс или минус. Будет плюс, т.к. мы переходим в систему, относительно которой старая движется со скоростью v, а не наоборот.

$$\omega'_п = \frac{\omega_п + \beta k_п c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad k'_п = \frac{k_п + \beta \frac{\omega_п}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\omega'_о = \frac{\omega_о + \beta k_о c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad k'_о = \frac{k_о + \beta \frac{\omega_о}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Подставляем сюда $k_x^о$, и $k_x^п$, и $\omega_п$ и $\omega_о$. Начнём с частот:

$$\omega'_п = \frac{\omega_п + \beta k_п^x c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega + \beta \omega \cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\omega'_о = \frac{\omega_о + \beta k_о^x c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega - \beta \omega \cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Очень похожие выражения для падающей и отражённой частот, но из-за того, что проекции волнового вектора на ось x в СК зеркала были разного знака, всё же не равны.

Грустно, что «угол падения равен углу преломления» выполняется только в СК неподвижного зеркала ☹ А в других синусоидальной э/м волне приходится подстраиваться под сжимающееся пространство-время, чтобы сохранить фазу.

Найдём и проекции волновых векторов в системе наблюдателя. Это нужно, чтобы найти углы.

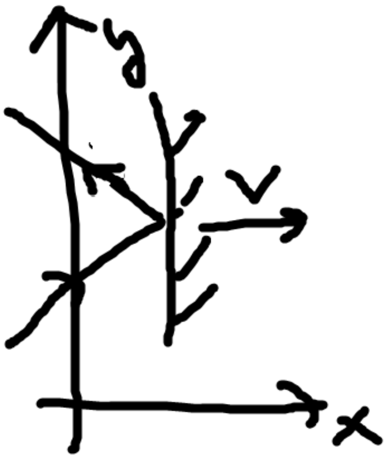
$$k'^{п}_{x} = \frac{\frac{\omega}{c}\cos\alpha + \frac{\beta\omega}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\cos\alpha + \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$k'^{o}_{x} = \frac{-\frac{\omega}{c}\cos\alpha + \frac{\beta\omega}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega}{c}\left(\frac{-\cos\alpha + \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Тем самым мы, зная всю необходимую информацию в СК зеркала (ω и α), а также параметр перехода в другую СК β, можем найти всё в штрихованной СК. Циклические частоты уже нашли, найдём и углы – падения и отражения, они будут различаться друг от друга и от α. Это уже будет посложнее

$$\cos\alpha'_{п} = \frac{|k'^{п}_{x}|}{\sqrt{k'^{п\,2}_{x} + k'^{п\,2}_{y} + k'^{п\,2}_{z}}}; \quad \cos\alpha'_{o} = \frac{|k'^{o}_{x}|}{\sqrt{k'^{o\,2}_{x} + k'^{o\,2}_{y} + k'^{o\,2}_{z}}}$$

Ну и надо подставить все штрихованные величины через нештрихованные. Игрековые и зетовые штрихованные такие же, как нештрихованные (игрековая ω/c*sin α, а зетовая ноль, если оси направлены так



, а иксовые штрихованные уже подсчитаны).

$$\cos\alpha'_п = \frac{\frac{w}{c}\left(\frac{\cos\alpha+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\frac{w}{c}\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\beta}\right)^2(1-\beta^2)}}$$

А для отражённой

$$\cos\alpha'_o = \frac{\frac{w}{c}\left(\frac{-\cos\alpha+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\frac{w}{c}\sqrt{\left(\frac{-\cos\alpha+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha+\beta}\right)^2(1-\beta^2)}}$$

Что это значит? Ведёт Игорь Крутой компанию на дачу, а сзади его машины – зеркала. Вы смотрите с заднего ряда на эти зеркала. Для вас угол падения и отражения один и тот же и равен α. А для наблюдателя на земле они различны и равны тем выражениям, которые написаны выше.

Напоследок вновь немножко абстрактности. Какая, на ваш взгляд, самая противная часть преобразований Лоренца?

Конечно же, подчёркнутая красным

$$a'_0 = \operatorname{ch}\theta\, a_0 - \underline{\operatorname{sh}\theta\, a_1}$$

$$a'_1 = \operatorname{ch}\theta\, a_1 - \underline{\operatorname{sh}\theta\, a_0}$$

$$a'_2 = a_2$$

$$a'_3 = a_3$$

Где в нулевой компоненте вылезает первая, а в первой нулевой. Время оказывается связанным с абсциссой и т.п.

А что, если я вам скажу, что подобное есть и в галилеевских преобразованиях? Надо только рассмотреть не сдвиг, а поворот. Например, в плоскости XY на угол α

$$x' = \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y$$

$$y' = \cos\alpha \cdot y - \sin\alpha \cdot x$$

$$z' = z$$

Чувствуете аналогию?

Только тут функции тригонометрические, а у Лоренца гиперболические. Потому что в 4-пространстве инвариантно ПСП, а не скалярное произведение. Если бы было бы инвариантом именно скалярное произведение, то константой было бы не E^2-p^2c^2, а E^2+p^2c^2, что было бы очень странно ☺ Поэтому Эйнштейн сделал инвариантом именно ПСП и не прогадал.